1. 已知单调连续函数的如下数据

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 |
|  | 1 |  | -2 |

用反插值法求方程在区间内根的近似值。(小数点后至少保留4位有效数字)

解：

由于函数  在  单调连续，故存在反函数 ，有如下函数表

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | -2 | -1 | 1 |
|  | 2 | 1 | 0 |

方法一：Lagrange 插值



从而有 .

方法二：Newton 插值

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| -2 | 2 |  |  |
| -1 | 1 | -1 |  |
| 1 | 0 |  |  |

从而有





1. 构造三次多项式，使得曲线与函数在和处相交，在处相切，并写出用近似的截断误差。（计算中用重节点牛顿插商法，计算尽可能用分数，截断误差不需要证明）

解：

构造三次多项式，使得曲线与函数在和处相交（函数值相等），在处相切（函数值相等且一阶导函数值相等），即需满足如下插值条件

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 0 |  |  |
|  | 1 | 0 | -1 |
|  | 0 |  |  |

用重节点的差商标建立插值多项式，差商表如下：

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 1 |  |  |  |
| 0 | 1 | 0 |  |  |
|  | 0 |  |  |  |
|  | -1 |  | 0 |  |

则插值多项式为



根据插值条件可设插值余项为



当  时，上式对任意的  都成立.

当  且不同于  时，构造关于变量  的函数，



上述函数充分光滑，并有如下零点



在四个互异节点  形成的三个区间上使用 Rolle 定理，则存在三个互异数，且不同于 ，使得有



这样知  至少有四个 () 互异零点，继续使用 Rolle 定理，知  至少有三个互异零点， 至少有两个互异零点， 至少有一个互异零点（设其为， 依赖于 ）.

而 ，将  带入，便得到



于是，误差余项为



1. 计算在区间，要求采用梯形公式或者Simpson公式计算，该积分的精确值为1.4626517459…，请比较两种方法的误差，如果想得到更高精度的结果，请建议一些新的解法。

解：

梯形公式:



Simpson公式：



将区间  等分为  份， 在每段上使用梯形公式，则有

复化梯形公式:



在每两段上使用 Simpson 公式，则有

复化Simpson公式：



Gauss公式：

区间  上的 Gauss 求积公式为，



节点和权系数为



对任意区间  上的积分，进行变量代换，可变为上的积分



使用 n = 5 的高斯求积公式可得，

.

n = 6，

.

n = 7，

.

更进一步，还可以分段使用Gauss型求积公式进一步提高精度。